На правах рукописи

Шухман Елена Владимировна

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ В ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТАХ И НЕОПУБЛИКОВАННЫХ МАТЕРИАЛАХ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Специальность 07.00.10 – История науки и техники

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2012

Работа выполнена на кафедре алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, Матвиевская Галина Павловна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Малых Алла Ефимовна
	канд. физико-математических наук, старший научный сотрудник, Петрова Светлана Сергеевна
Ведущая организация:	Московский государственный университет путей сообщений (МИИТ)

Защита состоится 15 марта 2012 г. в 14^{00} на заседании диссертационного совета Д 002.051.05 при Федеральном научном бюджетном учреждении Институте истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН (ИИЕТ) по адресу: 117861, Россия, г. Москва, ул. Обручева, д. 30а, корпус В.

С диссертацией можно ознакомиться в Отделе истории физико-математических наук или Дирекции Федерального научного бюджетного учреждения Института истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН.

Автореферат разослан 10 февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук И.О. Лютер

Общая характеристика работы

Бесконечные ряды в современной математике находят многочисленные применения как универсальный инструмент для представления широкого класса функций, выполнения аналитических преобразований, приближенных вычислений в различных задачах.

В XVIII веке существенный вклад в развитие теории бесконечных рядов внес великий ученый Леонард Эйлер (1707–1783). Работы Эйлера по теории бесконечных рядов достаточно хорошо изучены в историко-математической литературе. Наиболее полно эти вопросы рассмотрены в кандидатской диссертации А.Н. Гусева, в монографиях Дж. Ферраро и В.С. Варадараджана. Обзор и классификация работ Эйлера по теории рядов приведены редактором тома 16* полного собрания сочинений Эйлера («Leonhardi Euleri Opera omnia») Г. Фабером. Некоторые результаты Эйлера по теории рядов представлены в трудах У. Данхема, Й. Гофмана, Р. Райфа, Э. Сандифира, М. Клайна. Исследования Эйлера, касающиеся вопросов суммирования рядов, рассмотрены в работах В.В. Лихина, С.С. Петровой и М.В. Чирикова. Использование тригонометрических рядов подробно изучено А.Б. Паплаускасом, вопросы интерполяции — И.А. Головинским. Работы Эйлера, связанные с дзета-функцией, рекуррентными рядами, непрерывными дробями, рассмотрены В.Д. Павлидис (Горловой). Работы, относящиеся к гамма- и бета-функциям, исследованы И.В. Игнатушиной. Отдельные вопросы теории рядов и ее практического применения в трудах Эйлера описаны в кандидатских диссертациях М.И. Пулатовой и С.И. Черток. Общий обзор применений рядов для приближенных вычислений в работах Эйлера выполнен в кандидатской диссертации Ф.П. Жирнова. Приближенные методы для решения дифференциальных уравнений с помощью рядов рассмотрены в трудах Н.И. Симонова. Приближенные методы математического анализа и вариационного исчисления, в том числе аппроксимация, численное дифференцирование и интегрирование с помощью рядов, изучены Ж.Ю. Личиковой.

Однако, некоторые вопросы применения рядов в трудах Эйлера до сих пор остаются малоизученными. В частности, отсутствует систематическое изложение приемов приближенного вычисления значений трансцендентных функций и различных математических констант в его работах. Кроме того, недостаточно изучена неопубликованная часть научного наследия Эйлера, прежде всего, записные книжки ученого — двенадцать рукописных томов общим объемом около 4 000 страниц, которые хранятся в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН (фонд 136, опись 1, №129-140). Записные книжки позволяют восстановить ход рассуждений ученого, проследить процесс возникновения и эволюции идей, установления математических фактов и утверждений, разработки методов решения различных задач, а также уточнить датировку его научных открытий. Исследованиями неопубликованных заметок Эйлера занимались В.И. Смирнов, Г.К. Михайлов, Г.П. Матвиевская, Э. Кноблох и др. Им удалось обнаружить много результатов, которые не отражены в опубликованных работах ученого.

Отметим, что труды Эйлера содержат большое количество вычислительных результатов, которые приведены без строгого доказательства и промежуточных выкладок. Выбирая наиболее эффективные методы вычислений, Эйлер во многом полагался на свою необыкновенную интуицию. В наше время появилась возможность исследовать результаты Эйлера с помощью вычислительной техники. Вычислительный эксперимент позволяет изучить различные методы решения одной и той же задачи, установить причины выбора Эйлером конкретного приема вычислений, объективно сравнить эффективность различных методов, разработанных Эйлером. Исследования результатов Эйлера с помощью вычислительных экспериментов появились только в последнее десятилетие в работах Е.Н. Осьмовой и В. Гаучи.

Таким образом, **актуальность** темы исследования определяется тем, что изучение опубликованных работ, писем и заметок из записных книжек Эйлера по теории рядов и ее применению к приближенным вычислениям позволяет проследить развитие идей Эйлера в рассматриваемой области, выявить наиболее эффективные приемы вычислений, которые могут оказаться полезными и в настоящее время, а также обнаружить неопубликованные результаты, принадлежащие ученому.

Объектом исследования выступают опубликованные и неопубликованные материалы Эйлера (труды, письма, записные книжки), связанные с бесконечными рядами.

Предметом исследования является применение рядов для приближенных вычислений в работах Эйлера.

Цель диссертационного исследования состоит в изучении результатов Эйлера, относящихся к вычислительным аспектам теории рядов.

В работе решались следующие **задачи**:

– обзор истории возникновения и развития теории рядов и ее применения для приближенных вычислений с древнейших времен до середины XVIII в.;
– исследование основных достижений Эйлера в области теории бесконечных рядов по его опубликованным и неопубликованным материалам;
– изучение опубликованных и неопубликованных материалов Эйлера, связанных с применением рядов для приближенных вычислений значений интегралов, решений обыкновенных и дифференциальных уравнений, значений трансцендентных функций и математических констант.

Метод исследования основан на историко-научном и математическом анализе опубликованных сочинений Эйлера, его переписки, а также неопубликованных заметок из его записных книжек. Для анализа результатов Эйлера, связанных с точностью вычислений, и сравнения эффективности разработанных им численных методов использовался вычислительный эксперимент.

Научная новизна работы состоит в том, что:

во-первых, впервые в историко-математической литературе достаточно полно исследованы опубликованные и неопубликованные результаты Эйлера, включая ранее не описанные заметки из его записных книжек, связанные с формулой суммирования Эйлера-Буля, эйлеровыми произведениями, методами вычисления логарифмических и тригонометрических функций, констант π, e, Эйлера-Маскерони γ и Эрдёша-Борвейна α, что позволило уточнить датировки, восстановить вывод некоторых результатов, а также установить приоритет Эйлера в их открытии;

во-вторых, впервые проведено исследование с помощью вычислительного эксперимента абсолютной погрешности различных разложений, использованных Эйлером для вычисления констант π и γ, причем бóльшая часть экспериментальных результатов подтверждена строгими доказательствами.

Практическая значимость результатов диссертационной работы заключается, прежде всего, в том, что они могут служить основой для дальнейших исследований результатов Эйлера с помощью вычислительного эксперимента. Такие исследования могут выполняться студентами в рамках учебных курсов по вычислительной математике. Кроме того, результаты исследования дают новый материал для курсов по истории математики, могут использоваться при написании учебников по истории методов вычислений, теории рядов и т.д.

Основные положения, выносимые на защиту:

– Важнейшим достижением Эйлера в теории рядов стало открытие формул суммирования, которые нашли широкое применение в приближенных вычислениях, прежде всего, для оценки остатков в вычислительных формулах. Ранее неисследованные заметки из записных книжек ученого, относящиеся к выводу и применению формулы суммирования Эйлера-Буля, позволили установить приоритет Эйлера в открытии важных комбинаторных соотношений: рекуррентного правила для вычислений чисел Эйлера I рода в треугольнике Эйлера, а также связи многочленов Эйлера с производящей функцией для последовательности степеней.

– Эйлер широко использовал бесконечные произведения и непрерывные дроби в тесной связи с рядами. С бесконечными произведениями связаны его важнейшие открытия в теории рядов: вычисление точных значений рядов обратных четных степеней, пентагональная теорема, тождество для дзета-функции. Записные книжки включают тождества, не вошедшие в опубликованные работы, в частности, эйлеровы произведения, соответствующие всем вполне мультипликативным функциям по модулю 8.

– Эйлер усовершенствовал способы вычисления приближенного значения π с помощью рядов для арктангенса. Он предложил новый ряд для вычисления арктангенса, который для небольшого числа суммируемых членов дает бóльшую погрешность, но в пределе имеет лучшую сходимость, чем ряд Грегори-Лейбница. Эйлер вывел несколько общих тождеств для представления арктангенсов в виде суммы арктангенсов меньших аргументов, получил конкретные разложения, удобные для вычислений значения π, в том числе некоторые неопубликованные им тождества, которые были переоткрыты значительно позже и использовались для вычисления π в XIX и XX вв. Кроме того, с помощью формулы суммирования Эйлер получил асимптотический обертывающий ряд для вычисления π.

– Для вычисления константы e Эйлер использовал как, известное еще Ньютону, разложение e^x в степенной ряд, так и несколько непрерывных дробей, а также последовательность рациональных приближений, полученных им на основе дробно-рациональных приближений (диагональных апрроксимаций Паде) для функции e^x. Используя аппарат непрерывных дробей, Эйлер доказал иррациональность константы e и ее некоторых степеней. Неопубликованное разложение в ряд $e^{\arcsin x}$ позволило Эйлеру вычислить приближенное значение константы Гельфонда e^π.

– Эйлер впервые в истории математики рассмотрел константу Эйлера-Маскерони γ, вычислил ее приближенное значение с точностью до 15 десятичных цифр после запятой, открыл множество тождеств, связывающих значение константы со значениями сумм обратных степеней. Вычислительный эксперимент подтвердил, что Эйлер использовал для вычисления γ наиболее быстро сходящийся ряд.
– Эйлер стал первым математиком, который исследовал константу Эрдёша-Борвейна $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$. Не позднее 1737 г. Эйлер нашел основные тождества для вычисления этой константы, что позволило определить ее значение с точностью до 15 десятичных цифр после запятой.
– Эйлер впервые строго доказал единственность представления натурального числа в двоичной системе счисления с помощью рядов и бесконечных произведений, использовал алгоритм перевода десятичных дробей в недесятичные, применял запись чисел в системах счисления с основаниями 2 и 24, обозначая в последнем случае цифры латинскими буквами, как это принято в настоящее время.

Апробация результатов диссертационного исследования. Основные результаты докладывались автором на семинарах по истории математики Оренбургского педагогического университета (2006-2011 гг.); всероссийской научно-практической конференции «Математика. Информационные технологии. Образование» (Оренбург, 2006 г., 2008 г., 2011 г.); международной научной конференции «Леонард Эйлер и современная наука» (Санкт-Петербург, 2007 г.); международной научной конференции «Проблемы историко-научных исследований в математике и математическом образовании» (Пермь, 2007 г.); 5-ых Международных Колмогоровских чтениях (Ярославль, 2007 г.); 19-ой международной научной конференции им. академика М.Кравчука (Киев, 2008 г.); международной научной конференции «Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики» (Тамбов, 2008 г.); семинаре по истории и методологии математики и механики Московского государственного университета (Москва, март и ноябрь 2011 г.); V международной научной конференции «Математика. Образование. Культура.» (Тольятти, 2011 г.); межрегиональной научно-практической конференции молодых ученых Оренбургской области (Оренбург, 2011 г.). По теме диссертационного исследования автором опубликовано 18 работ общим объемом 5,9 п.л., в том числе 5 в журналах из перечня ВАК («История науки и техники» и «Вестник Оренбургского государственного университета») объемом 2,4 п.л.

Структура диссертации. Диссертация общим объемом 185 с. состоит из введения, трех глав, заключения, списка отечественных и зарубежных источников, содержащего 215 наименований, а также приложения, которое содержит копию статьи Я.В. Успенского «Об асимптотическом ряде Эйлера» («Sur une série asymptotique d'Euler»).

Содержание и основные результаты работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы исследования, приведен обзор источников по проблеме исследования, сформулирована цель и задачи диссертации, показана научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены выносимые на защиту научные положения, представлены сведения об апробации результатов, объеме и структуре диссертации.

Первая глава («Возникновение, становление и развитие теории бесконечных рядов до середины XVIII в.») состоит из двух разделов. В *первом разделе* исследован ранний период развития теории бесконечных рядов до середины XVII в., и показано, что на протяжении многих веков ее становление было обусловлено, прежде всего, возрастающими потребностями эффективных вычислений для решения прикладных математических задач. Математики Древней Греции и арабского Востока применяли ряды для вычисления площадей фигур и объемов тел. В XV-XVI вв. индийские математики получили разложения тригонометрических функций в степенные ряды и смогли вычислить отношение длины окружности к ее диаметру с точностью до семнадцати десятичных цифр. В XVII в. ряды стали применяться для приближенного выражения логарифмов (В. Броункер, Н. Меркатор) и тригонометрических функций (Дж. Грегори). В это же время были сформулированы основные понятия теории рядов: сходимость, расходимость и остаток ряда (П. Менголи).

Во *втором разделе* рассмотрены достижения в теории рядов в конце XVII-начале XVIII вв. Большой вклад в теорию рядов внесли создатели дифференциального и интегрального исчисления И. Ньютон (получил разложение степени бинома, предложил методы обращения рядов и других преобразований) и Г. Лейбниц (установил связь с бесконечными рядами общих задач анализа, открыл признак сходимости знакочередующихся рядов с монотонно убывающими и стремящимися к нулю членами, получил множество разложений иррациональных функций в ряды, применил ряды для решения дифференциальных уравнений). Отдельные признаки сходимости рядов были разработаны Я. Бернулли и И. Бернулли. Общий метод для разложения дифференцируемой функции в ряд был впервые опубликован Б. Тейлором, хотя в XX веке было установлено, что аналогичные формулы встречались в рукописях Дж. Грегори и И. Ньютона. Теория рекуррентных рядов была разработана А. де Муавром. Некоторые методы суммирования рядов предложены Х. Гольдбахом и Дж. Стирлингом. К. Маклорен показал однозначность разложения в ряд Тейлора, обосновал интегральный признак сходимости рядов, а также вывел общую формулу суммирования рядов.

Вторая глава («Вклад Эйлера в теорию рядов») посвящена исследованию опубликованных работ и неопубликованных материалов Эйлера по теории рядов.

В *первом разделе* показано, что Эйлер использовал понятийный аппарат теории рядов, практически эквивалентный современному, однако многие понятия теории рядов в его работах использовались без явного определения. Эйлер придерживается алгебраической трактовки ряда как математического объекта, для которого определены различные формальные операции (без исследования вопросов сходимости).

Впервые в истории математики в мемуаре 1731 г. E20[1] «Суммирование бесчисленных прогрессий» Эйлер дает строгое определение частичной суммы ряда, которую называет суммационным членом. Отметим, что суммационный член ряда по Эйлеру — более общее понятие, чем современное понятие частичной суммы ряда, поскольку он рассматривал не только целые значения индексов, но и дробные, а также иррациональные.

В диссертации рассмотрены предложенные Эйлером некоторые критерии сходимости, известные в современной математике, в частности, аналоги принципа сходимости Больцано-Коши, интегрального признака Коши-Маклорена, признака сравнения знакоположительных рядов, а также необходимое условие сходимости ряда.

Важным вкладом Эйлера в теорию рядов стало понятие обобщенной суммы ряда, приведенное впервые в письме к Х. Гольдбаху от 7 августа 1745 г. как «конечного выражения, из разложения которого возникает ряд».

[1] Здесь и далее для работ Эйлера указывается год представления статьи и ее порядковый номер в библиографическом списке Г. Энестрёма.

Эйлер также занимался исследованием двойных рядов: в статье 1771 г. E477 «Размышления о происхождении особенного ряда» ввел двойную дзета-функцию $\zeta(m,n) = \sum\limits_{i\geqslant j>0}^{\infty} \frac{1}{i^m j^n}$ и получил большое количество тождеств для введенного двойного ряда.

Во *втором разделе* приведены примеры использования Эйлером таких операций над рядами, как подстановка, арифметические действия, вычисление иррациональных функций от членов ряда, перестановка и группировка членов, дифференцирование и интегрирование. Понятия абсолютной и равномерной сходимости не были известны Эйлеру, указанные действия часто выполнялись с условно сходящимися и расходящимися рядами.

В *третьем разделе* рассмотрены основные результаты Эйлера, связанные с интерполированием рядов. Уже в самой ранней работе по теории рядов 1729 г. E19 «О трансцендентных последовательностях, то есть таких, что общий член не может быть выражен алгебраически» Эйлер получил интегральное представление для члена последовательности факториалов $n! = \int\limits_0^1 (-\ln x)^n dx$, которое легло в основу теории гамма-функции. В «Дифференциальном исчислении» (1755 г.) Эйлер рассмотрел общую задачу интерполирования как поиска члена ряда, соответствующего дробному или даже иррациональному индексу, и получил общие интерполяционные формулы для рядов и бесконечных произведений.

В *четвертом разделе* изучены различные методы суммирования расходящихся рядов, предложенные Эйлером, в том числе с использованием производящей функции, преобразования рядов с помощью подстановок, поиска суммы в виде решения дифференциального уравнения, а также поиска суммы в виде непрерывной дроби.

В *пятом разделе* рассмотрено открытие Эйлером формул суммирования (в настоящее время называемых формулами Эйлера-Маклорена и Эйлера-Буля), позволяющих получать удобные для вычислений асимптотические ряды, а также оценивать точность расчетных формул.

Формула суммирования Эйлера-Маклорена была впервые представлена в статье 1732 г. E25 «Общий метод суммирования прогрессий» в виде: $s = \int t\,dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12\,dn} - \frac{d^3t}{720\,dn^3} + \frac{d^5t}{30240\,dn^5} - \ldots$, где t обозначает общий член ряда, соответствующий номеру n, а s — частичная сумма первых n членов. В более поздних работах Эйлер установил связь коэффициентов в формуле суммирования с числами Бернулли, вычислил их значения вплоть до тридцатого коэффициента $\frac{8615841276005}{462}$, применил формулу для вычисления сумм рядов обратных степеней от 2 до 15, частичных сумм гармонического ряда, ряда логарифмов, показательных и тригонометрических функций. Также он показал, что ряд в формуле суммирования в общем случае расходится, но часто получается хорошее приближение, если оборвать вычисления на члене, наименьшем по абсолютной величине (это правило верно для обвертывающих рядов). Таким образом, Эйлер понимал особенности применения асимптотических обвертывающих рядов для приближенных вычислений, несмотря на отсутствие четкого определения обвертываемости и асимптотичности.

Важным открытием Эйлера стала также другая формула суммирования, которая в настоящее время называется формулой суммирования Эйлера-Буля. Впервые эта формула получена Эйлером в статье 1736 г. E55 «Усовершенствованный общий метод суммирования рядов» и более подробно исследована в «Дифференциальном исчислении» (1755 г.). Общая формула для частичной суммы ряда S, у которого член с номером x имеет вид zp^x, записывается следующим образом:

$$S = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{p-1}\frac{dz}{dx} + \frac{\beta p^{x+1}}{p-1}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{p-1}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\delta p^{x+1}}{p-1}\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{p-1}\frac{d^5z}{dx^5} + \ldots,$$

где $\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$, $\beta = \frac{p+1}{1\cdot 2(p-1)^2}$, $\gamma = \frac{p^2+4p+1}{1\cdot 2\cdot 3(p-1)^3}$, $\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(p-1)^4}$ и т.д.

Многочлены, стоящие в числителях выражений $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ в формуле Эйлера-Буля, в современной комбинаторике называют многочленами Эйлера, а их коэффициенты — числами Эйлера I рода. В диссертации рассмотрены ранее не изученные заметки из записных книжек, связанные с формулой суммирования Эйлера-Буля и ее частным случаем для знакопеременных рядов. Так, на л. 43 об. записной книжки №131 Эйлер приводит не вошедшие в опубликованные работы рекуррентное соотношение для чисел Эйлера I рода $E(i,j) = E(i-1,j)\cdot j + E(i-1,j-1)\cdot(i-j)$ и представление результатов вычислений в виде треугольной таблицы, которую в современной литературе называют «треугольник Эйлера». Здесь же он получил общее выражение для многочленов Эйлера: $A_v(n) = (1-n)^{v+1}(n + 2^v n^2 + 3^v n^3 + 4^v n^4 + 5^v n^5 + \ldots)$, устанавливающее их связь с производящей функцией $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^v n^k$ для последовательности степеней $1^v, 2^v, 3^v, \ldots$ Заметки на л.144 об. — 145 об. записной книжки №131 позволили полностью восстановить ход рассуждений Эйлера при оценке остатка ряда $\operatorname{arctg}\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} + \ldots$ с помощью формулы суммирования Эйлера-Буля, не вошедший в опубликованные мемуары.

В работу 1738 г. Е74 «О различных методах выражения квадратуры круга приближенными числами» Эйлер включил только окончательный результат: остаток ряда после суммирования n членов не превосходит $\frac{1}{p^{2n-1}(2n(1+p^2)+p^2-1)}$.

В *шестом разделе* представлены результаты Эйлера, относящиеся к использованию бесконечных произведений в тесной связи с рядами для представления функций, интегралов и трансцендентных констант, решения комбинаторных задач. Подробно описаны заметки из его записных книжек, связанные с эйлеровыми произведениями вида $\prod\limits_{p} \frac{1}{\left(1-\frac{c(p)}{p^s}\right)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$, где p — простое число, а c — вполне мультипликативная функция натурального аргумента. Были обнаружены несколько тождеств, не вошедших в опубликованные работы Эйлера, в частности, на л. 90 – 90 об. записной книжки №132 представлены все возможные эйлеровы произведения, соответствующие вполне мультипликативным функциям по модулю 8, в том числе и позже переоткрытое П. Дирихле разложение: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\ldots =$ $= \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdot\frac{29}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\ldots$

В **третьей главе** диссертации («Применение бесконечных рядов в опубликованных и неопубликованных работах Эйлера») выполнен анализ разнообразных применений рядов для приближенных вычислений в опубликованных и неопубликованных материалах Эйлера.

В *первом разделе* исследованы применения рядов для вычисления неопределенных интегралов (в случаях, когда интеграл не может быть выражен аналитически), для приближенного вычисления определенных интегралов, вычисления несобственных интегралов, решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В основном, Эйлер либо заменял в выражениях функцию на бесконечный ряд, либо представлял в виде ряда результат и применял метод неопределенных коэффициентов. Эйлер использовал как степенные, так и тригонометрические ряды, а для решения уравнений в частных производных — ряды из производных произвольной функции.

Во *втором разделе* показано, что Эйлер изучил, обосновал и максимально обобщил методы приближенного решения уравнений с одной переменной с помощью рядов, разработанные ранее И. Ньютоном и Д. Бернулли.

В *третьем разделе* рассмотрены применения рядов для приближенных вычислений трансцендентных функций. На основе разложения $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора в точке нуль Эйлер получил удобное для вычислений логарифмов тождество $\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \ldots$. В записной книжке Эйлера №130 обнаружены ранее не описанные заметки, в которых эта формула применена для вычисления натуральных логарифмов всех простых чисел от 2 до 109. Мемуар 1739 г. E128 «Метод, облегчающий подсчет синусов и тангенсов углов, как естественных, так и искусственных» Эйлер полностью посвятил выводу удобных расчетных формул для приближенного вычисления тригонометрических функций и их логарифмов. Аналогичные выкладки обнаружены на страницах его записной книжки №131.

В *четвертом разделе* исследованы материалы Эйлера, связанные с вычислением приближенного значения π. Он предложил ряд для вычисления арктангенса: $\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \ldots\right]$, имеющий, начиная с некоторого члена, зависящего от t, меньшую погрешность, чем ряд Грегори-Лейбница: $\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$ В диссертации проведено экспериментальное сравнение точности этих рядов, которое подтвердило все утверждения Эйлера относительно количества суммируемых членов, достаточного для достижения заданной точности вычислений. Получены оценки сверху и снизу для остатков рядов, выведены достаточные условия для определения интервалов, в которых бóльшую точность дает каждый из этих рядов.

Для уменьшения объема вычислений Эйлер вслед за Дж. Мэчином предложил представлять арктангенсы в виде суммы арктангенсов меньших аргументов. В нашем исследовании были впервые систематически описаны заметки из записных книжек Эйлера, касающиеся вычисления числа π с помощью таких представлений. Некоторые тождества не вошли в опубликованные работы ученого. Так, разложения $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$ и $\frac{\pi}{4} = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{20} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1985}$ были переоткрыты значительно позже другими математиками и использовались для вычисления π в XIX и XX вв. Ранее не исследованные заметки на л. 135 записной книжки №137 позволяют утверждать, что результаты, опубликованные лишь в 1862 г. в работе E809 «Ряды, наиболее удобные для приближенного нахождения квадратуры круга», были получены Эйлером в 1760–1764 гг.

В «Дифференциальном исчислении» (1755 г.) Эйлер приводит асимптотический ряд (полученный с помощью формулы суммирования): $\pi = 4n(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \frac{1}{n^2+9} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}) + \frac{1}{n} + \frac{B_2}{n^2} - \frac{B_6}{3\cdot2^2n^6} + \frac{B_{10}}{5\cdot2^4n^{10}} + \ldots - \frac{4\pi}{e^{2\pi n}-1}$, где n — фиксированное натуральное число, а B_k — числа Бернулли. Он высказал без строгого доказательства несколько утверждений о количестве суммируемых членов этого ряда для получения необходимого количества верных цифр в значении π, которые были экспериментально подтверждены в диссертации. На основе выражения для оценки остатка в формуле суммирования доказана обвертываемость ряда с постоянной обвертывания $\frac{4}{3}\sqrt{2}$. Доказательство строгой обвертываемости обсуждаемого ряда, не использующее формулу суммирования, представлено в малоизвестной работе Я.В. Успенского «Об асимптотическом ряде Эйлера», опубликованной в 1912 г. и приведенной в приложении к диссертации. В записных книжках Эйлера найдены два способа вывода асимптотического разложения для π.

В конце четвертого раздела рассмотрено развитие методов вычисления π со времен Эйлера до наших дней.

В *пятом разделе* рассмотрены опубликованные и неопубликованные материалы Эйлера, относящиеся к вычислению константы e с помощью рядов и непрерывных дробей. Используя аппарат непрерывных дробей, Эйлер доказал иррациональность константы e и ее некоторых степеней. Кроме того, в диссертации впервые описано использование Эйлером в работе 1772 г. E450 «Новые отношения, дающие приближение иррациональных величин» рациональных приближений для константы e, полученных на основе дробно-рациональных приближений (представляющих собой диагональные аппроксимации Паде) для функции $e^x \approx \frac{2+x}{2-x} \approx \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \approx \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} \approx$ $\approx \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4} \approx \ldots$ Ранее считалось, что впервые дробно-рациональные приближения для экспоненциальной функции были получены Ж.Г. Дарбу в 1876 г. На л. 206 об. записной книжки №131 обнаружена неопубликованная заметка с разложением в ряд $e^{\arcsin x}$, с помощью которого Эйлер вычислил приближенное значение константы Гельфонда e^{π}.

В *шестом разделе* выполнено систематическое описание опубликованных работ Эйлера и заметок из записных книжек, имеющих отношение к вычислению константы Эйлера-Маскерони $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n =$ $= 0,5772156649\ldots$ Эйлер впервые ввел эту константу при изучении частичных сумм гармонического ряда, вычислил ее приближенное значение с точностью до 15 десятичных цифр после запятой с помощью формулы суммирования, а также открыл множество тождеств, связывающих значение константы со значениями сумм рядов обратных степеней. Экспериментальное сравнение точности рядов для вычисления константы при одинаковом числе суммируемых членов подтвердило, что Эйлер использовал для вычислений наиболее быстро сходящийся ряд: $1 - \ln\frac{3}{2} - \gamma = \frac{1}{3\cdot 2^2}\left(\zeta(3) - 1\right) + \frac{1}{5\cdot 2^4}\left(\zeta(5) - 1\right) +$

$+ \frac{1}{7\cdot 2^6}\left(\zeta(7) - 1\right) + \ldots$

В *седьмом разделе* показано, что Эйлер впервые рассмотрел константу Эрдёша-Борвейна $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1} \approx 1{,}60669515241527$ как пример трасцендентного числа, которое не выражается через определенные интегралы от элементарных функций (предполагаются рациональные пределы интегрирования), и вычислил ее значение с точностью до 15 десятичных цифр после запятой. На основе изучения записных книжек и писем Эйлера установлено, что он не позднее 1737 г. нашел все основные тождества для вычисления константы: $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{2^n+1}{2^n-1} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(2^n-1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{2^n}$, где $d(n)$ — количество натуральных делителей n. В работе 1775 г. E565 «О наиболее трансцендентных количествах, которые не выражаются интегральными формулами» Эйлер выдвинул гипотезу о трансцендентности более общего выражения вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n+x}$, где $x \neq 0$, $a > 1$. Иррациональность таких чисел была доказана П. Борвейном в 1987 г., вопрос об их трансцендентности остается открытым.

В *восьмом разделе* изучены результаты Эйлера в области недесятичных систем счисления. С помощью рядов и бесконечных произведений во «Введении в анализ бесконечных» (1748 г.) Эйлер впервые строго доказал единственность представления натурального числа в двоичной системе счисления. В диссертации впервые описана заметка на л. 208 об. записной книжки №131, включающая перевод числа π, выписанного с 12 знаками после запятой, в двоичную систему счисления $\pi \approx 11,00100100001111110110101001111010 10_2$.
Здесь же Эйлер представляет это число в системе счисления с основанием 24: $c, ciniaalla = 3 + \frac{3}{24} + \frac{9}{24^2} + \frac{13}{24^3} + \frac{9}{24^4} + \ldots$, обозначая цифры латинскими буквами $a = 1, b = 2, c = 3, \ldots$ Ниже, видимо вспомнив про то, что необходим символ для обозначения нуля, Эйлер выписывает обозначения $a = 0, b = 1, c = 2, \ldots$ и переводит в 24-ричную систему счисления число $1745_{10} = das_{24}$.

В **заключении** обобщены результаты исследования и сделаны выводы, подтверждающие положения, выносимые на защиту.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Изучен исторический процесс возникновения и развития теории рядов с древнейших времен до середины XVIII в., обусловленный, прежде всего, возрастающими потребностями эффективных вычислений для решения прикладных математических задач.
2. На основе анализа опубликованных трудов, переписки и рукописных материалов Эйлера систематизированы и проанализированы с современной

точки зрения его результаты, связанные с теорией и вычислительными применениями бесконечных рядов.

3. Систематизированы и исследованы заметки из записных книжек Эйлера, включая ранее не описанные, связанные с формулами суммирования, бесконечными произведениями, методами вычисления логарифмических и тригонометрических функций, а также математических констант с помощью рядов.
4. Проведено исследование с помощью вычислительного эксперимента абсолютной погрешности различных разложений в ряды, использованных Эйлером для вычисления математических констант, а также подтверждены все высказанные им утверждения о количествах суммируемых членов рядов, необходимых для получения заданной точности вычислений.
5. Обоснованы оценки остатков рядов для вычисления арктангенса, подтверждающие результаты вычислительного эксперимента, доказана обвертываемость асимптотического ряда Эйлера для вычисления π.
6. Определена более точная датировка получения некоторых результатов Эйлера, связанных с вычислением математических констант, и восстановлен ход рассуждений Эйлера при оценке остатка ряда для $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}$.
7. Впервые в историко-математической литературе установлен приоритет Эйлера в:
   - открытии рекуррентного правила для вычислений чисел Эйлера I рода в треугольнике Эйлера, связи многочленов Эйлера с производящей функцией для последовательности степеней;
   - полном исследовании всех возможных эйлеровых произведений, соответствующих вполне мультипликативным функциям по модулю 8;
   - открытии некоторых разложений арктангенса на сумму арктангенсов меньших аргументов, которые широко применялись для вычисления значения π в XIX и XX вв.;
   - получении диагональных аппроксимаций Паде для экспоненциальной функции и вычислении приближенного значения константы Гельфонда e^{π};
   - исследовании константы Эрдёша-Борвейна и выводе основных тождеств для её вычисления;
   - использовании алгоритма перевода десятичных дробей в недесятичные системы счисления, аналогичного современному.

Основные результаты диссертационного исследования отражены в следующих публикациях автора

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Вклад Леонарда Эйлера в создание теории суммирования расходящихся рядов// История науки и техники. — 2007. — №9. — С. 2-7.
2. Приближенное вычисление числа пи с помощью ряда для $\operatorname{arctg} x$ в опубликованных и неопубликованных работах Леонарда Эйлера // История науки и техники. — 2008. — №4. — С. 2-17.
3. Об оценке остатка асимптотического ряда для вычисления числа π, предложенного Л. Эйлером // История науки и техники. — 2009. — №10. — С. 2-7.
4. Приближенное вычисление некоторых математических констант в опубликованных и неопубликованных работах Л. Эйлера // Вестник Оренбургского государственного университета. — 2010. — №9. — С. 74-80.
5. Неопубликованные заметки Леонарда Эйлера, связанные с формулой суммирования Эйлера-Буля. // Вестник Оренбургского государственного университета. — 2011. — №4. — С. 219-222.

Другие публикации:

6. Обзор различных методов вычисления сумм бесконечных расходящихся рядов в работах Л. Эйлера //Математика. Информационные технологии. Образование / Материалы региональной научно-практической конференции в двух частях. Ч.1 — Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. — С. 235-237.
7. Методы суммирования бесконечных расходящихся рядов в работах Л. Эйлера // Леонард Эйлер и современная наука. Материалы международной научной конференции. — СПб.: РАН, 2007. — С. 201-205.
8. О выводе Л. Эйлером расчетных формул для определения приближенных значений тригонометрических функций// Проблемы историко-научных исследований в математике и математическом образовании. Материалы международной научной конференции. — Пермь: ПГПУ, 2007. — С. 122-126.
9. Предпосылки возникновения теории бесконечных рядов // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. — 2007.— №4. — С. 18-26.
10. Об истории вывода расчетных формул для значений тригонометрических функций в работах Л. Эйлера// Труды 5-ых Колмогоровских Чтений. — Ярославль: ЯрГПУ, 2007. — С. 325-329.

11. Заметки Л. Эйлера о недесятичных системах счисления // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 трав., 2008 р., Київ: Матеріали конф. — К.: ТОВ «Задруга», 2008. — С. 282. (соавт. Шухман А.Е.)
12. О некоторых способах вычисления числа π в работах Л. Эйлера // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 трав., 2008 р., Київ: Матеріали конф. — К.: ТОВ «Задруга», 2008. — С. 283.
13. Вычисление числа пи с помощью разложений для арктангенса в записных книжках Леонарда Эйлера // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики: Международная научная конференция, Тамбов, 22-25 апреля 2008 г.— Тамбов: Изд-во Першина Р.В., 2008.— С. 160-163.
14. Вычисление константы Эйлера-Маскерони с помощью бесконечных рядов в работах Леонарда Эйлера // Математика. Информационные технологии. Образование. Сборник научных трудов. — Оренбург: ОГУ, 2008. — С. 148-152.
15. Заметки о недесятичных системах счисления в опубликованных работах и записных книжках Леонарда Эйлера // Математика в высшем образовании — 2008.— №6. — С. 143-146. (соавт. Шухман А.Е.)
16. Некоторые неопубликованные заметки Эйлера о бесконечных произведениях // Математика и ее приложения: сборник трудов V Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура.» (к 75-летию В.М. Монахова), 26-28 апреля 2011 г., Россия, г. Тольятти, часть 1 — Тольятти: ТГУ, 2011. — С. 90-93.
17. О вычислении константы e в работах Леонарда Эйлера // Математика. Информационные технологии. Образование: материалы III Всероссийской научно-практической конференции, Оренбург, 8-9 декабря 2011 г. [Электронный ресурс] — Оренбург: Руссервис, 2011. — электрон. опт. диск (DVD-ROM) — ISBN 978-5-904627-21-8. — 9 с.
18. Об обвертываемости асимптотического ряда для вычисления π, предложенного Леонардом Эйлером. // Математика. Информационные технологии. Образование: материалы III Всероссийской научно-практической конференции, Оренбург, 8-9 декабря 2011 г. [Электронный ресурс] — Оренбург: Руссервис, 2011. – электрон. опт. диск (DVD-ROM) – ISBN 978-5-904627-21-8. — 7 с.